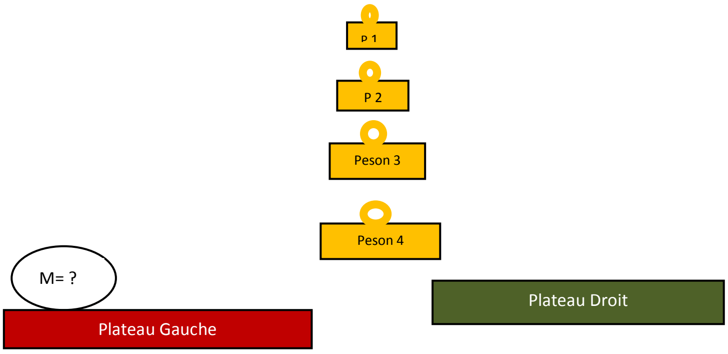
Jean-Nicolas Maisonnier
jean.nicolas@maisonnier.com

LA BALANCE A DEUX PLATEAUX : UNE PISTE FECONDE POUR APPREHENDER L'ARITHMETIQUE BIOLOGIQUE, ET LE ROLE PARTICULIER DES PUISSANCES DE TROIS

Résumé

Nous montrons dans cette étude pourquoi les êtres vivants seraient dotés d'un « ordinateur » étalonné sur les puissances de trois (1, 3, 9, 27, …). Une balance à deux plateaux nous sert de modèle pour cette démonstration. Elle met en œuvre les concepts de base de la « Bio-arithmétique » définis dans la « Théorisation de la Numérisation Naturelle» (**TNN**) de Xavier Sallantin. Ce document apporte des éléments à la compréhension du rôle des puissances de 3 dans l'architecture du Code génétique des êtres vivants.



L'énigme du Bédouin Nabatéen

"Au cours d'un trek en Jordanie, le guide bédouin a posé à l'un de mes petits-fils la question suivante : On dispose d'une balance à deux plateaux et de quatre poids, quelles doivent être les valeurs de ces poids pour pouvoir peser au kilo près un sac de riz d'un poids maximum de 40 kg ? Les poids peuvent être disposés des deux côtés de la balance. La réponse (que je vous livre pour vous éviter de tester toutes les combinaisons) est que les quatre poids doivent être respectivement de 1, 3, 9 et 27 kg. Mon petit-fils m'a aussitôt avisé sachant que je faisais de ces quatre nombres des métanombres constitutifs avec le 0, et le 2 de la méta-arithmétique. Voyez comme du fond du désert nabatéen peut surgir une interpellation pour la TNN ! Je suis très intrigué par cette astuce transmise sans doute de berger à berger depuis l'antiquité. Car vous savez que pour moi le code génétique avec ses 64 codons sextuplés n'est pas imputable au hasard mais au statut ontologique de la logique trialectique."

Extrait du message de Xavier Sallantin envoyé au Groupe Béna le 22 février 2007

Les membres du Groupe Béna ont saisi cette énigme pour relancer leurs réflexions sur la Bio-arithmétique. Depuis cette date Jacques Malbrancke et moi-même avons analysé en détail le fonctionnement de balance à deux plateaux en fonction des « pesons » choisis pour l'équiper. Cette note fait le point de ces études.

Comment le nabatéen a-t-il trouvé cette solution ?

A-t-il posé le problème sous forme d'équations à résoudre. A-t-il essayé toutes les combinaisons possibles ? La solution est-elle unique ? Est-elle généralisable à des balances de classe plus élevée ? Telles sont les questions que nous nous sommes posées.

A-t-il résolu mathématiquement le problème ?

La formalisation mathématique du problème et la recherche de sa solution optimale n'est pas simple. La « classe » de la balance étant fixée (ici M=40 kg), il faut supposer que le nabatéen choisit de l'équiper de N « pesons » p_i prélevés parmi les poids de 1 à 40 kg (éventuellement en choisissant plusieurs fois le même poids) et que quelque soit m inférieure ou égale à 40, il puisse l'exprimer comme la somme de certains de ces pesons, éventuellement diminuée de la somme d'autres pesons (placés dans le même plateau que m).

$$\forall m \ entier \in [1{,}40]\ , \exists\ n_i \in \mathbb{Z} \rightarrow m = \sum_0^N n_i\ p_i \quad \text{avec } n_i \in [-1{,}0{,}1]$$

Pour tous m entier inférieur ou égal à 40, il existe des coefficients n_i entiers relatifs tels que m soit la somme de 0 à N des pesons choisis affectés d'un coefficient égal à -1, 0 ou 1.

Cette équation signifie que le peson de rang i, dont la valeur de la masse est p_i est utilisé dans le plateau droit (en admettant que sac de riz m est sur le plateau gauche) si n_i =1, dans le plateau gauche si n_i =-1, et reste au sol si n_i = 0.

Enfin parmi les ensembles de pesons qui satisfont cette équation, il faut déterminer celui qui est optimum suivant un certain critère : par exemple l'ensemble qui contient le nombre minimum de pesons.

A ma connaissance nous ne savons pas résoudre simplement ces équations et je pense que ce n'est pas ainsi que le nabatéen a trouvé la solution.

En essayant toutes les combinaisons ?

Le nombre de combinaisons est élevé. Par exemple, il y a 91390 choix possibles de 4 poids parmi 40 :

$$C_{40}^4 = \frac{40!}{4!\,36!} = \frac{37 \times 38 \times 39 \times 40}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 91\,390$$

Il est évident que certains choix ne permettent pas de répondre au problème, par exemple [1,2,3,4] ou [37,38,39,40], et qu'on peut les éliminer. Il reste cependant que cette méthode est fastidieuse.

Guidés par la solution [1,3,9,27] que nous connaissions, nous avons utilisé un tableur Excel, et nous avons remarqué que tout système de poids en puissance d'un entier **B** permettait de peser des sacs de riz au kilo près, avec un nombre réduit de poids :

$$\forall m, B \in \mathbb{N}\ , \exists\ n_i \in \mathbb{Z} \rightarrow m = \sum_0^I n_i B^i$$

$$\text{avec } |n_i| \leq \text{Ent}\,(B \div 2)$$

Pour tous m et B entiers positifs, il existe des coefficients n_i entiers relatifs inférieurs ou égaux en valeur absolue à la partie entière de B/2 tels que m soit la somme de 0 à I des puissances successives de l'entier B pondérée de ces coefficients.

Cette équation signifie que les pesons de rang i, dont la valeur de la masse est B^i sont en nombre $|n_i|$.
Si n_i est positif, ils sont sur le plateau droit (en admettant que sac de riz m est sur le plateau gauche)
Si n_i est négatif, ils sont sur le plateau gauche.

Dans un autre document, nous avons comparé les avantages et les inconvénients des Bases en puissance de 1, de 2, de 3, de 4, etc. Mais, conscient que les bédouins n'avaient pas de tableur Excel pour extraire la meilleure combinaison, il nous faut admettre un autre processus de sélection.

Par un processus de sélection naturelle ?

C'est en effet par un processus de sélection naturelle que l'on arrive le plus rapidement à la solution. Notre Nabatéen n'a pas choisi tout seul, il est l'héritier d'une longue histoire dont voici le récit :

Ses ancêtres étaient moins ambitieux que lui : ils voulaient seulement peser et vendre des sacs de riz X de 1 ou de 2 kg. Comme il est impossible d'équilibrer ces deux sacs avec un seul peson, chaque marchand a choisi **au hasard** deux pesons :

Le Marchand 1 a choisi le couple (1,1) ; c'est un bon choix, si l'équilibre se fait avec 1 dans le plateau droit (en vert ci-dessous), le sac vaut 1, s'il se fait avec 1 et 1, le sac vaut 1+1=2.

Le marchand 2 s'en sort aussi. Mais pas le marchand 3 : il ne peut pas équilibrer les sacs de 1 kg.

Parmi les huit marchands ci-dessous, quatre ne pouvant vendre seront éliminés du marché :

<u>Balances de Classe 2 :</u> Disposition des pesons sur les deux plateaux pour équilibrer le sac X posé sur le plateau de gauche (rouge).

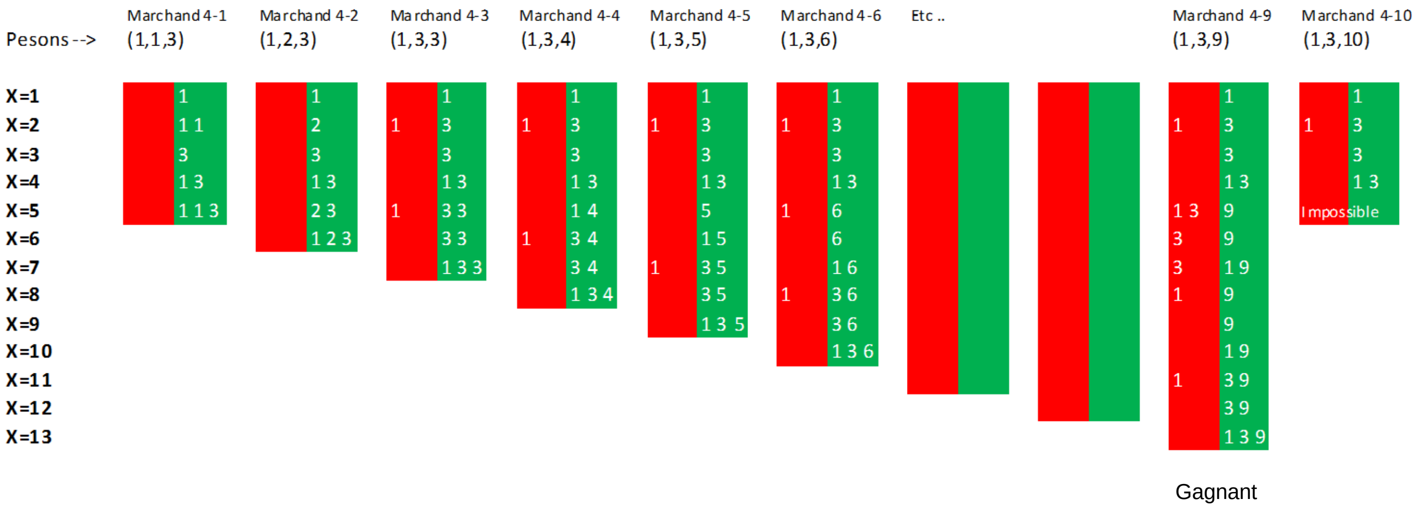
	Marchand 1	Marchand 2	Marchand 3	Marchand 4	Marchand 5	Marchand 6	Marchand 7	Marchand 8
Pesons choisis->	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(1,4)	(3,4)
Sac X=1	/ 1	/ 1	impossible	/ 1	2 / 3	Impossible	/ 1	3 / 4
Sac X=2	/ 1 1	/ 2	impossible	1 / 3	/ 2	Impossible	Impossible	Impossible
			Eliminé			Eliminé	Eliminé	Eliminé

Parmi les quatre qui vont faire des affaires, certains vont s'apercevoir qu'avec leur couple de pesons ils peuvent aussi évaluer et vendre des sacs plus lourds, ils vont prospérer plus que les autres :

	Marchand 1	Marchand 2	Marchand 4	Marchand 5
Pesons choisis->	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
Sac X=1	/ 1	/ 1	/ 1	2 / 3
Sac X=2	/ 1 1	/ 2	1 / 3	/ 2
Sac X=3		/ 1 2	/ 3	/ 3
Sac X=4			/ 1 3	
	Eliminé	Eliminé		Eliminé

C'est en particulier le cas du **Marchand 4** qui a choisi le couple **[1,3].** Il est le seul à pouvoir négocier des sacs de 4 kg ! Pour survivre la génération suivante va adopter ce couple **[1,3],** et chacun va choisir au hasard un autre peson pour étendre la classe de sa balance.

Balances de classe 3



A nouveau un marchand se détache du lot : **le marchand 4-9, qui a choisi le triplet [1, 3, 9], est le seul qui puisse peser des sacs de 13 kg**.

C'est donc ce triplet **[1, 3, 9]** qui est adopté par la génération suivante. Elle va ajouter un quatrième peson pour augmenter la classe de sa balance. Ce n'est pas la peine de figurer les performances de chaque quadruplet ; il est facile de montrer (Annexe 1) que tout peson supplémentaire de poids compris entre 1 et 27 inclus, augmente la classe de la balance d'une quantité égale à son poids. Par contre les pesons de poids supérieur à 27 ne permettent pas d'équilibrer toute la gamme de la balance. C'est donc le quadruplet **[1, 3, 9, 27]** qui sort vainqueur.

Il en sera de même pour les générations suivantes qui vont ainsi sélectionner successivement les puissances de trois : $[3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 \ldots]$

Conclusion N°1 :

Notre Nabatéen et ses ancêtres n'avaient pas besoin d'être mathématiciens, encore moins de savoir que la suite 1, 3, 9, 27 est la suite des puissances de Trois pour la sélectionner comme étant celle qui optimise le nombre de pesées possibles pour un nombre donné de pesons.

Se pose alors la question suivante : avant l'apparition des hommes, les êtres vivants n'auraient-ils pas été capables de sélectionner par un procédé analogue cette suite des puissances de trois ? Le procédé décrit ci-dessus est en effet celui d'une sélection darwinienne classique.

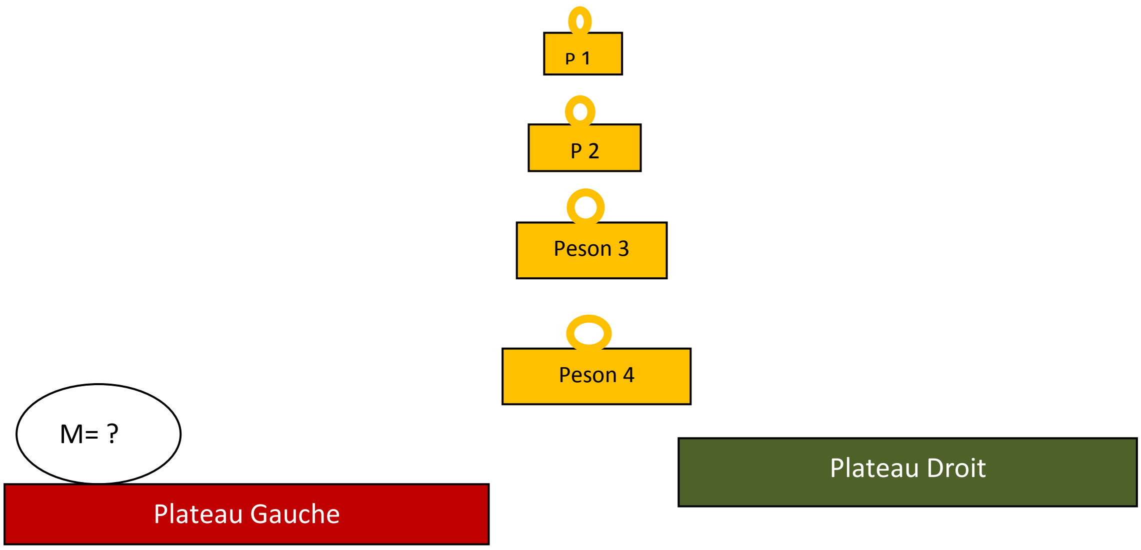
Reste à montrer que la balance à deux plateaux et son fonctionnement est maitrisable par un automate biologique.

La balance à deux plateaux : modèle de l'ordinateur biologique postulé par la TNN ?

Xavier Sallantin, dans sa Théorisation de la Numérisation Naturelle (TNN)[1], suppose en effet que les organismes vivants sont capables de manipuler de l'information comme le font nos ordinateurs, mais pas avec la même efficacité. Nos ordinateurs calculent avec notre arithmétique ordinaire univoque. Les bio-ordinateurs avec une bio-arithmétique dégradée où la distinction entre la progression géométrique et son inverse est impossible. Il y a confusion entre la multiplication et la division, entre 2^1 et 2^{-1}

Ce « bogue » sur le registre de la numération est associé à une confusion sur le registre physique entre augmentation et diminution de la dimension d'espace (confusion entre passage du contenant au contenu et passage du contenu au contenant).

Par contre un bio-ordinateur maitrise l'opération d'addition (1 + 1 = 2) et ne la confond pas avec la soustraction (2 - 1 = 1). Cette faculté numérique est associée physiquement avec la capacité à distinguer le sens d'une Force, attractive ou répulsive, centrifuge ou centripète ; ce qui dans l'espace à trois dimensions se traduit pas la distinction entre la gauche et la droite, le devant du derrière ou le haut du bas.



Pour fonctionner la balance à deux plateaux nécessite bien que son opérateur distingue le plateau droit du plateau gauche, ainsi que le haut du bas, pour déposer ou enlever les pesons C'est une machine à comparer. Elle possède les trois opérateurs : <, = et > (inférieur à, égal et supérieur à).

[1] Voir en particulier le Fascicule diffusé par Xavier Sallantin le 14 mai 2004 intitulé « Application de la TNN au codage génétique » sur le Site du Groupe Béna à l'adresse http://www.groupebena.org/article.php3?id_article=33

Dans ces conditions, c'est aussi une machine à ordonner. Avec sa balance l'opérateur peut ordonner les pesons dont il a équipé sa balance (il suffit pour cela qu'il compare les masses des pesons deux par deux). Il peut ainsi les disposer sur le sol par ordre croissant de masse.

A partir de là, j'ai démontré (voir Annexe 2) que la pesée de la masse inconnue est automatisable. Sans nécessiter d'autres opérateurs que **<, = et >** , ni d'autres instructions que « *prendre le peson* La balance ainsi automatisée est comme si elle était utilisée par un marchand aveugle qui aurait aussi perdu la mémoire des valeurs numériques de chaque peson et même la capacité à évaluer leur poids en les manipulant. Il n'est sensible et ne réagit qu'au basculement des plateaux, pour modifier sa conduite. Mais il est très ordonné, et il range toujours les pesons qu'il manipule dans le même ordre, que ce soit au sol, ou sur les plateaux.

Conclusion N°2:

La balance à deux plateaux avec un ensemble de pesons ordonné modélise le Bio-ordinateur dont seraient équipés les êtres vivants d'après la TNN de Xavier Sallantin.

N.B. : Nous avons raisonné sur une balance qui compare des masses, mais le même raisonnement pourrait être fait sur toute autre grandeur. On pourrait imaginer un comparateur de longueurs ou de charges électriques.

De deux conclusions précédentes, se déduit l'affirmation suivante :

Si les êtres vivants sont équipés d'un Bio-ordinateur tel que le postule la TNN, alors les plus performants sont étalonnés sur les puissances de trois.

Cette étude apporte donc une première explication au rôle singulier des puissances de trois dans la structure du Code génétique découvert par Xavier Sallantin en 1972.

Ci-joint Annexes 1 et 2

ANNEXE 1

Pourquoi 3^{I+1} est le poids maximal du I+1 éme peson ?

Nous avons vu qu'en choisissant 28 comme 4[ème] peson après 1,3, 9, on ne parvient pas à équilibrer un sac de 13 kg. (13 = 1 + 3 + 9). Ce résultat est-il généralisable ?

Si on choisit un peson P_{I+1} de masse supérieure à 3^{I+1} , par exemple égal à (3^{I+1} + 1) peut-on équilibrer un sac de masse $m = \sum_0^I 3^i + 1$? La réponse est non, il faudrait pour cela disposer sur ce peson sur le plateau droit, et tous les autres avec la masse m sur le plateau gauche et constater que

$$m + \sum_0^I 3^i = 3^{I+1} + 1 \text{ ?}$$

Or, compte tenu de l'égalité suivante :

$$\sum_0^I 3^i = \frac{(3^{I+1} - 1)}{2}$$

Qui est un cas particulier de :

$$\forall B > 1 \in \mathbb{N} , \sum_0^I B^i = \frac{(B^{I+1} - 1)}{(B - 1)}$$

La charge du plateau gauche vaut :

$$1 + 2 \times \sum_0^I 3^i = 3^{I+1}$$

Elle ne peut être équilibrée par 3^{I+1} + 1

ANNEXE 2

Automatisation de la Balance à deux plateaux.

Pour automatiser la balance il faut se mettre dans la peau d'un **opérateur aveugle, amnésique, et insensible à la masse des pesons,** qui ne réagit qu'aux indications de la balance (bascule ou non, à droite ou à gauche) avec un comportement toujours le même du genre : « je charge (ou je décharge) le peson suivant ».

Pour cela on est obligé, au début de chaque pesée, de **ranger tous les pesons sur le sol dans un ordre croissant**. Cette opération préalable est faisable par l'opérateur décrit ci-dessus.

Il faut aussi **fixer l'ordre de manipulation des pesons**. L'automate commencera t'il par le premier peson (le plus petit en valeur) ou le dernier (le plus gros), celui du milieu ou un autre au hasard ?

Comme l'opérateur n'a aucune idée de la valeur masse qui a été déposée sur le plateau gauche, il semble plus « économique en énergie » qu'il commence par charger sur le plateau droit, le peson de plus faible poids (le 1). Sauf si l'équilibre a eu lieu, il n'a toujours aucune idée du chemin qu'il reste à parcourir. Par économie, il charge donc le peson de poids suivant. Sauf équilibre atteint, ce raisonnement reste valable à tout moment. Qu'il faille charger ou décharger, à droite ou à gauche, l'automate a intérêt à faire l'effort minimal.

Ce raisonnement intuitif est arithmétiquement confirmé quand les pesons sont les puissances successives de Base 2 ou de Base 3. En effet le dernier peson (I+1) a bien une masse supérieure à la somme de tous les pesons précédents, car :

$$\forall B > 1 \in \mathbb{N} , \sum_{0}^{\mathrm{I}} \mathrm{B}^{\mathrm{i}} = \frac{(\mathrm{B}^{\mathrm{I}+1} - 1)}{(\mathrm{B} - 1)}$$

Ce qui donne pour B=2 :

$$2^{\mathrm{I}+1} = 1 + \sum_{0}^{\mathrm{I}} 2^{\mathrm{i}}$$

Et pour B=3 :

$$3^{\mathrm{I}+1} = 1 + 2 \times \sum_{0}^{\mathrm{I}} \mathrm{B}^{\mathrm{i}}$$

C'est encore en partie vrai pour B>3, cas où les pesons sont en plusieurs exemplaires. Ou bien, le peson suivant (I+1) est de même masse que le précédent (il est donc moins lourd que la somme des précédents), ou bien, il a une masse inférieure à la somme des précédent.

En effet, nous avons montré par ailleurs que le nombre d'exemplaires étaient égal à la partie entière de B/2, par conséquent la somme des précédents est au plus égale à

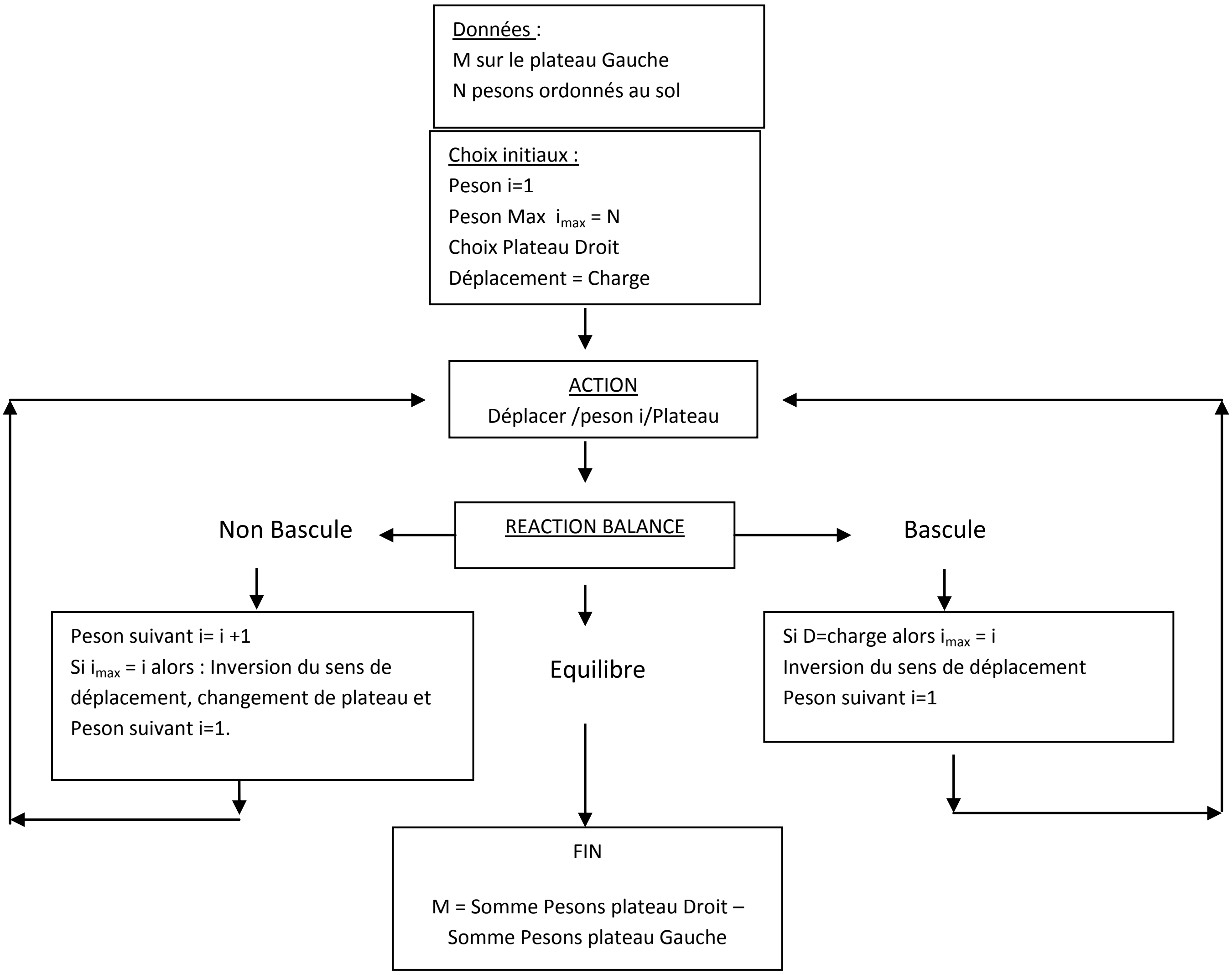
$$\mathrm{Ent}\,(\mathrm{B} \div 2) \times \sum_{0}^{\mathrm{I}} \mathrm{B}^{\mathrm{i}}$$

Qui est égal à :

$$\mathrm{Ent}\,(B \div 2) \times \frac{(B^{I+1} - 1)}{(B - 1)}$$

Qui est toujours inférieur à B^{I+1} quand B est supérieur à 1

Avec ces règles, il est possible d'écrire un **algorithme** qui automatise la pesée. En voici le schéma :



Cet algorithme a été traduit d'une part en Visual basic sur un Fichier **Excel** et d'autre part en **Netlogo**.

- Le fichier Excel fonctionne pour des balances de 1 à 10 000 kg et des pesons en puissance de 2 à 20. Il est possible de télécharger ce modèle sur le Site du Groupe Béna, à l'adresse : http://www.groupebena.org/article.php3?id_article=132

- La modélisation NetLogo fonctionne pour des Masses de 1 à 128 kg et des pesons en puissance de 2 à 10. Il est possible d'actionner ce modèle sur le Site : http://www.maisonnier.com/jn/logo/nabateen.html

Ces modèles mettent en évidence que :

- Les systèmes de pesons en Base 2 et en Base 3 sont les seuls qui ne nécessitent qu'un exemplaire de chaque peson de même valeur.
- Le système de pesons de base B=2 est le seul qui ne nécessite de charger qu'un plateau.
- Le système de pesons de base B=3 est celui qui nécessite le minimum de peson.
- Pour B=4 et B=5 il faut deux exemplaires par peson. Mais pour B=4, le second exemplaire ne sert jamais dans le plateau de gauche.
- Pour B=2N (pair) il faut N exemplaires de chaque peson, mais le plateau gauche n'en utilise que N-1.
- Pour B=2N+1, il faut N exemplaires de chaque peson, et les deux plateaux les utilisent.

Ces modélisations calculent les 4 critères suivants,

1. le **nombre de pesons** nécessaires à chaque classe de balance,
2. le **poids cumulé des pesons** de chaque classe de balance,
3. le **nombre de manipulations** de pesons pour chaque pesée,
4. **l'énergie de déplacement** des pesons pour chaque pesée.

Ces quatre critères sont représentatifs du « coût » de fonctionnement des balances. La balance sera d'autant plus performante que ces valeurs seront faibles.

Pour les balances de classe 1 à 140, nous obtenons les résultats suivants :

- Les pesons en Base 3 minimisent toujours le Critère 1(dont 7 fois à égalité avec le système à Base 2).
- Les pesons en Base 3 minimisent les 4 critères à la fois pour 9 classes de balance (1-4, 1-13, 1-38, 1-39, 1-40, 1-108, 1-112, 1-116, 1-121), alors que les balances en Base 2 ne minimisent l'ensemble que pour 5 classes de balances (1-3,1-7, 1-14 et 1-15)
- Les balances en Base 4 et plus ne minimisent jamais l'ensemble des 4 critères.

Ces études mettent donc en évidence l'efficacité « énergétique » du système de pesons en puissance de trois.