Arithmétique, problème du nabatéen et analyse combinatoire

Michel Nguyen The

Vendredi 21 novembre 2008

Plan

Polynômes.

Séries génératrices. Exemple des dés à 6 faces.

Bioarithmétique d'Alain Bruyère.

Problème du nabatéen.

Polynômes

Définition : Un polynôme à coefficients dans une algèbre $\mathbb{K}$ est un $(n+1)$-uplet d'éléments de K $(a_0, \cdots, a_n)$ où n est un entier naturel.
Notation : On note $\sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ le $n+1$-uplet $(a_0, \cdots, a_n)$.
Notation : On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$.
Polynôme de degré n à coefficients réels :

$$\sum_{k=0}^{n} a_n X^n$$

avec $a_n \neq 0$.
Exemple : $1+X$, $1+X+X^2$

Opérations sur les polynômes

Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_m X^m$. Supposons $n \geq m$. Si $n > m$, on note $b_k = 0$ pour $k > m$. Alors

Addition :

$$A + B = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$$

Produit :

$$AB = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) X^k$$

Série entière : Fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0} a_n z^n \end{array}$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
Addition et multiplication :
formalisation identique à celle des polynômes.
Si $f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0} b_n z^n$, alors

$$(f+g)(z) = \sum_{n=0} (a_n + b_n) z^n$$

$$(fg)(z) = \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

Séries génératrices

Série génératrice : Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Fonction génératrice associée :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0} a_n z^n \end{array}$$

Exemples:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \cdots) \longrightarrow f(z) = \displaystyle\sum_{n=0} z^n = \frac{1}{1-z}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots) \longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \cdots) \longrightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} \left(= z \sum_{n=0} nz^{n-1} = z \left(\frac{1}{1-z} \right)' \right)$$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (C_k^n) \longrightarrow f(z) = (1+z)^k$

Rappels sur les dés à six faces

Somme des deux dés	Résultats dés	Nombre de possibilités
2	(1,1)	1
3	(1,2), (2,1)	2
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4
6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	5
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3
11	(5,6), (6,5)	2
12	(6,6)	1

Séries génératrices de probabilité

a_n : probabilité d'un événement paramétré par n.

Exemples :

• Résultat d'un dé à six faces.

$f_{1D6}(z) = \frac{1}{6}\left(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right).$

• Résultat somme de deux dés à six faces.

$f_{2D6}(z) = f_{1D6}^2(z) = \left(\frac{1}{6}\left(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right)\right)^2.$

$$\begin{aligned} f_{2D6}(z) &= \frac{1}{36}\Big(z^2 + 2\,z^3 + 3\,z^4 + 4\,z^5 + 5\,z^6 \\ &\quad +6z^7 + 5\,z^8 + 4\,z^9 + 3\,z^{10} + 2\,z^{11} + z^{12}\Big) \end{aligned}$$

Somme des deux dés	Résultats dés	Séries génératrices ($\times$ 36)
2	(1,1)	$z \cdot z$
3	(1,2), (2,1)	$z \cdot z^2$, $z^2 \cdot z$
4	(1,3), (2,2), (3,1)	$z \cdot z^3$, $z^2 \cdot z^2$, $z^3 \cdot z$
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	$z \cdot z^4$, $z^2 \cdot z^3$, $z^3 \cdot z^2$, $z^4 \cdot z$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ énumère des objets de paramètre n. Exemples :

• Résultat d'un dé à six faces.

$f_{1D6}(z) = \left(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right)$.

• Résultat somme de deux dés à six faces.

$f_{2D6}(z) = f_{1D6}^2(z) = \left(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right)^2$.

Quelles sommes puis-je atteindre avec des pièces de 2 et 5 francs ?

• zéro pièce : SG : $1z^0 = 1$.

• une pièce de 2 : SG : z^2.

• deux pièces de 2 : SG : $z^2 \times z^2 = 4$.

• zéro, une ou deux pièces de 2 : SG : $1 + z^2 + z^4$.

• autant de pièces de 2 que je veux : SG : $\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n\geq 0} z^{2n}$.

• autant de pièces de 2 et de 5 que je veux : SG : $\frac{1}{1-z^2}\frac{1}{1-z^5}$.

Compositions et partitions d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$. De combien de manières peut-on écrire n comme somme d'entiers ?

Réponse variable selon que les entiers sont ordonnés ou pas.

Composition de n : suite d'entiers positifs de somme n (ainsi (1,2,2) et (2,1,2) seront deux compositions distinctes de l'entier 5).

Partition de n : liste d'entiers positifs, de somme n, rangée par ordre croissant (ainsi $1+2+2$ et $2+1+2$ seront des écritures différentes de la même partition du nombre 5, soit (1,2,2)).

Bioarithmétique d'Alain Bruyère

On représente les nombres de 1 à 64 comme somme d'entiers distincts (partitions d'entiers avec des parts distinctes).

Par exemple :
- $3 = 0 + 3 = 1 + 2$
- $5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3$

En termes de séries génératrices :
- $z^3 = z^0 \cdot z^3 = z^1 \cdot z^2$
- $z^5 = z^0 \cdot z^5 = z^1 \cdot z^4 = z^2 \cdot z^3$

La série génératrice de la distribution des codons d'Alain Bruyère s'écrit :

$$f(z) = (1 + z) \cdot (1 + z^2) \cdot (1 + z^3) \cdot (1 + z^4) \cdot (1 + z^5) \cdot (1 + z^6)$$

Série génératrice des codons bruyères

Rappel :
$f(z) = (1+z)\cdot(1+z^2)\cdot(1+z^3)\cdot(1+z^4)\cdot(1+z^5)\cdot(1+z^6)$

On a bien $f(1) = 64$ (nombre de codons).

En développant f (par un logiciel) on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + z + z^2 + 2\,z^3 + 2\,z^4 + 3\,z^5 + 4\,z^6 + 4\,z^7 + 4\,z^8 \\ &= +5\,z^9 + 5\,z^{10} + 5\,z^{11} + 5\,z^{12} + 4\,z^{13} + 4\,z^{14} + 4\,z^{15} + 3\,z^{16} \\ &= +2\,z^{17} + 2\,z^{18} + z^{19} + z^{20} + z^{21} \end{aligned}$$

Remarque : cette distribution est différente de celle des codons naturels. Par exemple, l'arginine, la leucine et la sérotonine ont 6 représentations, et aucun codon bioarithmétique ne possède 6 représentations.

Série génératrice des codons bruyères

On peut marquer les entiers rentrant dans la somme :

$$f(z, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) =$$
$$(1 + u_1 z) \cdot (1 + u_2 z^2) \cdot (1 + u_3 z^3) \cdot (1 + u_4 z^4) \cdot (1 + u_5 z^5) \cdot (1 + u_6 z^6)$$

```
> P:=(1+a1*z)*(1+a2*z^2)*(1+a3*z^3)*(1+a4*z^4)*(1+a5*z^5)*(1+a6*z^6);
                               2           3           4           5           6
  P := (1 + a1 z) (1 + a2 z ) (1 + a3 z ) (1 + a4 z ) (1 + a5 z ) (1 + a6 z )

> series(P,z,40);
```

Série génératrice des codons

En développant on trouve :

```
> series(P,z,40);
                 2                 3                 4                        5
1 + a1 z + a2 z  + (a3 + a1 a2) z  + (a4 + a1 a3) z  + (a5 + a1 a4 + a2 a3) z

                                          6
     + (a6 + a1 a5 + a2 a4 + a1 a2 a3) z  + (a1 a6 + a2 a5 + (a3 + a1 a2) a4)

     7                                     8
    z  + (a2 a6 + (a3 + a1 a2) a5 + a1 a3 a4) z  +

                                                     9
    ((a3 + a1 a2) a6 + (a4 + a1 a3) a5 + a2 a3 a4) z  +

                                                           10
    ((a4 + a1 a3) a6 + (a1 a4 + a2 a3) a5 + a1 a2 a3 a4) z   +
```

Série génératrice des codons

$$((a5 + a1\ a4 + a2\ a3)\ a6 + (a2\ a4 + a1\ a2\ a3)\ a5)\ z^{11} +$$

$$((a1\ a5 + a2\ a4 + a1\ a2\ a3)\ a6 + (a3 + a1\ a2)\ a4\ a5)\ z^{12} +$$

$$((a2\ a5 + (a3 + a1\ a2)\ a4)\ a6 + a1\ a3\ a4\ a5)\ z^{13} +$$

$$(((a3 + a1\ a2)\ a5 + a1\ a3\ a4)\ a6 + a2\ a3\ a4\ a5)\ z^{14} +$$

$$(((a4 + a1\ a3)\ a5 + a2\ a3\ a4)\ a6 + a1\ a2\ a3\ a4\ a5)\ z^{15} +$$

Série génératrice des codons

$$((a_1 a_4 + a_2 a_3) a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4) a_6 z^{16} + (a_2 a_4 + a_1 a_2 a_3) a_5 a_6 z^{17} + (a_3 + a_1 a_2) a_4 a_5 a_6 z^{18} + a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 z^{19} + a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 z^{20} + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 z^{21}$$

Nombre de représentations de 11

```
> P:=(1+z)*(1+z^2)*(1+z^3)*(1+z^4)*(1+z^5)*(1+z^6)\
> *(1+z^7)*(1+z^8)*(1+z^9)*(1+z^10)*(1+z^11);
```

$$P := (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^3)(1 + z^4)(1 + z^5)(1 + z^6)(1 + z^7)(1 + z^8)(1 + z^9)(1 + z^{10})(1 + z^{11})$$

```
> series(P,z,40);
```

$$1 + z + z^2 + 2z^3 + 2z^4 + 3z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 6z^8 + 8z^9 + 10z^{10} + 12z^{11}$$
$$+ 14z^{12} + 16z^{13} + 19z^{14} + 22z^{15} + 25z^{16} + 28z^{17} + 32z^{18} + 35z^{19}$$
$$+ 39z^{20} + 43z^{21} + 46z^{22} + 49z^{23} + 53z^{24} + 56z^{25} + 59z^{26} + 62z^{27}$$
$$+ 64z^{28} + 66z^{29} + 68z^{30} + 69z^{31} + 69z^{32} + 70z^{33} + 69z^{34} + 69z^{35}$$
$$+ 68z^{36} + 66z^{37} + 64z^{38} + 62z^{39} + O(z^{40})$$

Représentations de 9, 10 et 11

```
> P:=(1+a1*z)*(1+a2*z^2)*(1+a3*z^3)*(1+a4*z^4)*(1+a5*z^5)*(1+a6*z^6)\
> *(1+a7*z^7)*(1+a8*z^8)*(1+a9*z^9)*(1+a10*z^10)*(1+a11*z^11);
                         2             3             4             5             6
P := (1 + a1 z) (1 + a2 z ) (1 + a3 z ) (1 + a4 z ) (1 + a5 z ) (1 + a6 z )

             7             8             9              10              11
    (1 + a7 z ) (1 + a8 z ) (1 + a9 z ) (1 + a10 z  ) (1 + a11 z  )

> coeff(P,z,9);
       a2 a7 + (a3 + a1 a2) a6 + (a4 + a1 a3) a5 + a2 a3 a4 + a1 a8 + a9

> coeff(P,z,10);
(a3 + a1 a2) a7 + (a4 + a1 a3) a6 + (a1 a4 + a2 a3) a5 + a1 a2 a3 a4 + a2 a8

     + a1 a9 + a10

> coeff(P,z,11);
(a4 + a1 a3) a7 + (a5 + a1 a4 + a2 a3) a6 + (a2 a4 + a1 a2 a3) a5

     + (a3 + a1 a2) a8 + a2 a9 + a1 a10 + a11
```

On retrouve par exemple $4+7=11$, $1+3+7=11$, ..., $11=11$.

Asymptotique

Si on écrit

$$\prod_{m\geq 1}(1+z^m)=\sum_{n\geq 0} Q_n z^n$$

alors

$$Q_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{\pi\sqrt{n/3}}}{4\cdot 3^{1/4} n^{3/4}}$$

(signifie que le rapport entre ces deux grandeurs tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.)
Outils utilisés pour la démonstration : changement de variable

$$L(t) := \log Q(e^{-t}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{e^{-mt}}{1-e^{-mt}}$$

et transformation de Mellin (difficile).

Problème du nabatéen

Question : Peut-on poser les poids de 1 à 40 avec les poids 1, 3, 9 et 27 ?

Autre formulation : On fait intervenir les entiers 1, 3, 9 et 27 de manière positive, négative ou nulle. Peut-on obtenir par sommation les entiers de 1 à 40 ?

Question modifiée : On fait intervenir les entiers 1, 3, 9 et 27 et leurs opposés. Peut-on, en sommant parmi ces entiers, obtenir les entiers de 1 à 40 ? (Si n et $-n$ interviennent tous les deux, ils s'annulent.)

Réponse : développer les séries génératrices correspondantes.

Séries génératrices : utiles pour vérifier une solution, mais pas pour trouver une solution.

Problème du nabatéen

```
> P:=(1+z)*(1+z^3)*(1+z^9)*(1+z^27);
                                    3          9          27
                 P := (1 + z) (1 + z ) (1 + z ) (1 + z   )

> Q:=subs(z=1/z,P);
                              /      1  \ /      1  \ /      1 \
              Q := (1 + 1/z) |1 + ----| |1 + ----| |1 + ---|
                             |       3 | |       9 | |     27|
                             \      z  / \      z  / \    z  /
```

Problème du nabatéen

```
> series(P*Q,z,40);
 -40        -39     -38        -37        -36        -35     -34        -33     -32
z     + 2 z     + z     + 2 z      + 4 z      + 2 z      + z     + 2 z      + z     + 2

     -31        -30        -29        -28        -27        -26        -25        -24
    z     + 4 z      + 2 z      + 4 z      + 8 z      + 4 z      + 2 z      + 4 z      + 2

     -23     -22        -21     -20        -19        -18        -17     -16        -15
    z     + z     + 2 z     + z     + 2 z      + 4 z      + 2 z      + z     + 2 z      +

     -14        -13        -12        -11        -10        -9        -8        -7        -6
    z     + 2 z      + 4 z      + 2 z      + 4 z      + 8 z     + 4 z     + 2 z     + 4 z

          -5        -4        -3        -2        -1       0
     + 2 z     + 4 z     + 8 z     + 4 z     + 8 z     + O(z )
```

Problème du nabatéen

Énumération rigoureuse : sommer les polynômes

$$(1+z)*(1+z^3)*(1+z^9)*(1+z^{27}),$$
$$(1+z^{-1})*(1+z^3)*(1+z^9)*(1+z^{27}),$$

...

$$(1+z^{-1})*(1+z^{-3})*(1+z^{-9})*(1+z^{-27}),$$

puis enlever 2^4-1, puisque le terme 1 apparaît dans chacun des 2^4 polynômes.
C'est automatisable.

Problème du nabatéen

Autre possibilité pour éliminer les doublons : marquer chaque entier puis éliminer les termes où un entier et son opposé interviennent.

```
P:=(1+a*z)*(1+b*z^3)*(1+c*z^9)*(1+d*z^27);
Q:=subs(z=1/z,P);
series(P*Q,z,40);
subs({a^2=0,b^2=0,c^2=0,d^2=0},%);
subs({a^2=0,b^2=0,c^2=0,d^2=0},%);
subs({a^2=0,b^2=0,c^2=0,d^2=0},%);
subs({a=1,b=1,c=1,d=1},%);
```

Je suis obligé d'effectuer cette opération plusieurs fois sous Maple, car Maple cherche à factoriser et peut écrire un terme sous la forme par exemple

```
                 2                      2
    ((a c d + b   c d a) c + a d + a b   d) d)
```

et après élimination de b*b il reste encore du d*d à éliminer.

Problème du nabatéen

Résultat final après élimination des doublons :

```
> subs({a=1,b=1,c=1,d=1},%);
 -40     -39     -38     -37     -36     -35     -34     -33     -32     -31     -30
z    + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     +

     -29     -28     -27     -26     -25     -24     -23     -22     -21     -20
-19
    z    + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z

        -18     -17     -16     -15     -14     -13     -12     -11     -10     -9
     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z     + z    +

     -8     -7     -6     -5     -4     -3     -2     -1        0
    z   + z    + z    + z    + z    + z    + z    + z    + O(z )
```

et après élimination de b*b il reste encore du d*d à éliminer.

• Les séries génératrices permettent de vérifier rapidement une solution.

• Les SG ne permettent pas *a priori* de trouver une solution : il faut énumérer toutes les possibilités.

• Pour trouver une solution, il est naturel d'utiliser un algorithme de programmation dynamique.

• On peut peut-être écourter l'algorithme si on connaît les distributions limites, éventuellement grâce aux SG.

Considérations épistémologiques

• fonction de partition d'énergie = série génératrice

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$$

• alliance entre continu et discontinu, entre fini et infini : une SG énumère le fini jusqu'à l'infini, permettant le passage du discontinu au continu.

• Outil méconnu permettant de résoudre beaucoup de problèmes de probabilité.