Une méthode géométrique de construction des nombres premiers

Laurent HUA

L'échelle des multiples de 6

Un nombre premier est nécessairement de la forme **6p+1** ou **6p-1**. La recherche des nombres premiers s'effectue par conséquent dans l'ensemble des voisins des multiples de 6, que l'on peut représenter géométriquement comme une échelle.

Le n[ème] « barreau » de l'échelle réunit les voisins de **6n**. Lorsque les deux extrémités d'un barreau sont des nombres premiers, on dit qu'ils forment un couple.

Tous les nombres à gauche sont de la forme **6p-1**, ceux de droite de la forme **6p+1**. A gauche comme à droite, un nombre sur deux est de la forme **4q+1**, et un nombre sur deux de la forme **4q-1** (ou **4q+3**, ce qui revient au même et permet de mieux les distinguer).

Deux lignes croisées reliant les nombres de la forme **4q+1** et **4q+3** se superposent ainsi à l'échelle :

35 ____ 36 ____ **37**

29 ____ 30 ____ **31**

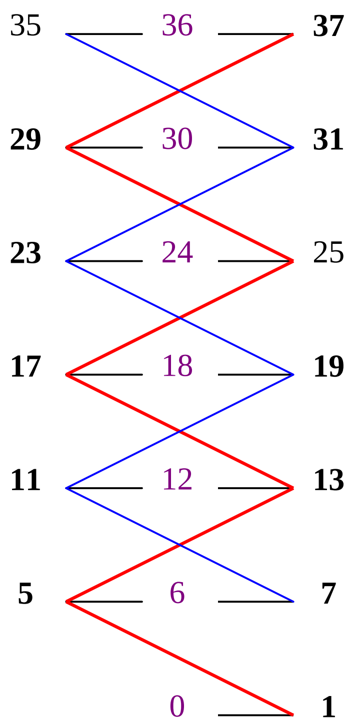
23 ____ 24 ____ 25

17 ____ 18 ____ **19**

11 ____ 12 ____ **13**

5 ____ 6 ____ **7**

0 ____ **1**



Sur le $n^{ème}$ barreau, 2 combinaisons sont possibles :

- Un nombre de la forme **6p-1 / 4q+1** relié à un nombre de la forme **6p+1 / 4q+3**
- Un nombre de la forme **6p-1 / 4q+3** relié à un nombre de la forme **6p+1 / 4q+1**

Je suggère ici une analogie entre quatre groupes de nombres « voisins » des multiples de 6 et les quatre bases sur la double hélice de l'échelle ADN où l'Adénine (A) ne peut être associée qu'à la Thymine (T), et la Cytosine (C) qu'à la Guanine(G).

Trois types de nombres non-premiers

Pour prouver qu'un nombre est premier, on peut chercher à démontrer qu'il ne l'est pas ou, plus généralement, à caractériser les nombres non-premiers dans l'ensemble des nombres de la forme **6p ± 1**.

Un nombre non-premier **de la forme 6p+1** est le produit :

- soit de deux nombres de la forme 6q+1 (exemple : 7x13=91)
- soit de deux nombres de la forme 6q-1 (exemple : 5x11=55)

Un nombre non-premier **de la forme 6p-1** est le produit :

- d'un nombre de la forme 6q+1 par un nombre de la forme 6q-1 (exemple : 7x5=35)

Trois cas peuvent donc être distingués :

1er cas : Nombre non-premier **y de la forme 6p+1**
dont les deux facteurs diffèrent d'un multiple de 6.

Il existe alors deux entiers **n** et **c** tels que :

$\mathbf{Y + 9n^2 = c^2}$ [1] où,

n est le nombre de barreaux de l'échelle qui séparent les deux facteurs de y,
c est la demi-somme de ces deux facteurs.

Exemple : **133** qui est le produit de 7 par 9

$133 + 9x2^2 = 13^2$

n = 3-1 =2
c = (19+7)/2 = 13.

La relation [1] n'est jamais qu'une autre écriture de l'identité remarquable selon laquelle le produit de deux facteurs est égal à la différence des carrés de leur demi-somme et de leur demi-différence.

$\underline{\mathbf{2^{eme}cas}}$: Nombre non-premier **y de la forme 6p-1**
dont les deux facteurs diffèrent d'un multiple de 6, plus 2

Le plus petit des facteurs est donc de la forme **6p-1**
Il existe alors deux entiers **n** et **c** de même définition, tels que :

$$\mathbf{Y + (3n+1)^2 = c^2}$$

<u>Exemple</u> : **65** qui est le produit de 5 par 13

$65 + (3x1+1)^2 = 9^2$

n = 2-1 = 1
c = (5+13)/2 = 9.

$\underline{\mathbf{3^{eme}cas}}$: Nombre non-premier **y de la forme 6p-1**
dont les deux facteurs diffèrent d'un multiple de 6, moins 2

Le plus petit des facteurs est donc de la forme **6p+1**
Il existe alors deux entiers **n** et **c** de même définition, tels que :

$$\mathbf{Y + (3n-1)^2 = c^2}$$

<u>Exemple</u> : **119** qui est le produit de 7 par 17

$119 + (3x2-1)^2 = 12^2$

n = 3-1 = 2
c = (7+17)/2 = 12.

Horace aura tout intérêt à vaincre séparément chacun des trois Curiaces.

Crible parabolique

Le crible d'Eratosthène est linéaire, puisqu'il consiste à effacer de la suite des nombres entiers les multiples de 2 et de tous les nombres impairs supérieurs à 1.

1) Le premier cas (**nombre de la forme 6p+1**) suggère un crible parabolique :

Dans l'équation $\mathbf{Y + 9n^2 = c^2}$, **c** est la demi-somme des facteurs **m** et **m'** de **y**, et **6n** leur différence.

$$m' - m = 6n$$
$$m' + m = 2c$$

$$\Rightarrow \quad m = c - 3n$$
$$m' = c + 3n$$
$$y = mm' = c^2 - 9n^2$$

en prenant $c = m + 3n$,

$$y = m^2 + 6mn$$

Or $\mathbf{y(n) = m^2 + 6mn}$ est **l'équation générique des tangentes** à la parabole $\mathbf{y(n) = -9n^2}$ aux points d'abscisses $\mathbf{-m/3}$.

En donnant à **m** les valeurs $\mathbf{6p \pm 1}$, l'intersection du réseau de tangentes obtenu avec les verticales d'abscisses entières positives permet de repérer en ordonnée l'ensemble des nombres non-premiers de la forme **6p+1**.

Parmi les nombres de la forme **6p+1** inférieurs à 150, il y en a 9 qui ne sont pas premiers, tous les autres sont premiers.

6p+1	non premiers
7	
13	
19	
25	25
31	
37	
43	
49	49
55	55
61	
67	
73	
79	
85	85
91	91
97	
103	
109	
115	115
121	121
127	
133	133
139	
145	145

2) Nombre de la forme 6p-1 ($2^{ème}$ et $3^{ème}$ cas précédents) :

Le réseau des tangentes aux points d'abscisses **$-m/3$** à la parabole **$y(n) = -9n^2$** peut être décomposé en deux sous-réseaux :

- le rouge, constitué des droites qui coupent l'axe des ordonnées aux carrés des nombres de la forme **6p-1** ($2^{ème}$ cas).
- le bleu, constitué des droites qui coupent l'axe des ordonnées aux carrés des nombres de la forme **6p+1** ($3^{ème}$ cas).

On recherche l'intersection :

- Du réseau rouge avec les verticales d'abscisses **$n+1/3$**
- Du réseau bleu avec les verticales d'abscisses **$n+2/3$**

Parmi les nombres de la forme **6p-1** inférieurs à 150, il y en a 7 qui ne sont pas premiers, tous les autres sont premiers.

6p-1	non premiers
5	
11	
17	
23	
29	
35	35
41	
47	
53	
59	
65	65
71	
77	
83	
89	
95	95
101	
107	
113	
119	119
125	125
131	
137	
143	143

Les trois cas sont bien entendu superposables. Le crible parabolique ainsi défini constitue bien une méthode géométrique de construction des nombres premiers, rattachés ainsi « par défaut » à la parabole **$y(n) = -9n^2$.**

Le faisceau des tangentes à la parabole **$y = -9x^2$** aux points d'abscisses **$-m/3$** où **m** prend toutes les valeurs des voisins entiers des multiples de 6 **coupe l'axe des ordonnées à des points d'ordonnées carrés** (carrés de la forme **$(6p+1)^2$** ou **$(6p-1)^2$**, ce qui permet de distinguer deux sous-ensembles de tangentes : les rouges et les bleues (voir figure en dernière page) :

Il suffit alors de projeter sur l'axe des ordonnées :

- les intersections **de toutes les tangentes** avec les verticales d'abscisses entières.
- les intersections des **tangentes bleues** avec les verticales d'abscisses **$n + {}^2/_3$** (**n** entier)
- les intersections des **tangentes rouges** avec les verticales d'abscisses **$n + {}^1/_3$** (**n** entier)

Tous ces points sur l'axe des ordonnées, **auxquels il faut rajouter les carrés** (intersections des tangentes avec cet axe), constituent exactement l'ensemble des voisins des multiples de 6 non-premiers. « En négatif », on obtient donc la répartition des nombres premiers.

Cette construction met en évidence deux choses intéressantes qui peuvent être des pistes pour continuer cette recherche :

- d'abord la régularité totale du "point de départ" (TOUS les points d'abscisses **$-m/3$**) pour arriver, selon deux règles de projection "constantes" (une pour chaque type de tangentes), à "l'empreinte négative" de la répartition irrégulière des nombres premiers.

- le fait même qu'il y ait deux cas à distinguer (les tangentes rouges et les tangentes bleues) pour les nombres de la forme **6p-1**, alors que tous les nombres de la forme **6p+1** sont obtenus de la même manière. Il y a donc une certaine asymétrie (analogie avec le monde physique).

____

Construction géométrique des non-premiers